DS n°7 : Anneaux, matrices et systèmes, polynômes – Corrigé

Noté sur 140 pts ±5 pts pour le soin et la clarté.
Il faut 110 points pour avoir 20.

Exercice 1 : un anneau matriciel

40 pts

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$M(a,b) = aI + bJ$$
$$E = \{M(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

1,25 pt

1) Exprimer J^2 en fonction de J et I.

Un calcul direct montre que $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{2J - I}$.

2,75 pts

2) Étant donné $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, déterminer un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M(a,b)M(c,d) = M(\alpha, \beta)$.

On a

$$\begin{aligned} M(a,b)M(c,d) &= (aI + bJ)(cI + dJ) \\ &= acI + adJ + bcJ + bd(2J - I) \\ &= (ac - bd)I + (ad + bc + 2bd)\, J \end{aligned}$$

En posant $\boxed{\alpha = ac - bd}$ et $\boxed{\beta = ad + bc + 2bd}$, on a donc $M(a,b)M(c,d) = M(\alpha, \beta)$.

4,5 pts

3) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

On va montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- On a $I_2 = I = 1 \times I + 0 \times J \in E$.

Soit maintenant deux matrices $X, Y \in E$. Il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $X = M(a,b)$ et $Y = M(c,d)$.

- Montrons que $X - Y \in E$:

$$\begin{aligned} X - Y = M(a,b) - M(c,d) &= aI + bJ - cI - dJ \\ &= (a-c)I + (b-d)J = M(a-c, b-d) \in E \end{aligned}$$

- Montrons que $XY \in E$: par la question précédente,

$$XY = M(a,b)M(c,d) = M(ac - bd, ad + bc + 2bd) \in E$$

Ainsi, $(E, +, \cdot)$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc un anneau.

- Montrons enfin que E est commutatif. On a

$$XY = M(ac - bd, ad + bc + 2bd)$$

et par le même calcul,

$$YX = M(ca - db, da + cb + 2db)$$

et comme la multiplication est commutative sur $\mathbb{R}$, on a $ac = ca$, $bd = db$, etc.

Finalement, $\boxed{(E, +, \cdot) \text{ est un anneau commutatif}}$.

4,5 pts + 8 pts + 6 pts

4) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in E$:

(i) $JX = I$ (ii) $X^2 = I$ (iii) $(X + J)^n = J^\top$ avec $n \in \mathbb{N}$

Résolvons (i). Étant donné $X \in E$, on peut poser $X = aI + bJ$.

$$\begin{aligned} JX = I &\iff J\,(aI + bJ) = I \\ &\iff aJ + bJ^2 = I \\ &\iff a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ &\iff \begin{pmatrix} a+b & a+2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff a + 2b = 0 \quad \text{et} \quad a + b = 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} JX = I &\iff a = -2b \quad \text{et} \quad -b = 1 \\ &\iff b = -1 \quad \text{et} \quad a = 2 \\ &\iff X = 2I - J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$.

Résolvons (ii).

$$\begin{aligned} X^2 = I &\iff (aI + bJ)^2 = I \\ &\iff a^2 I + abJ + baJ + b^2 J^2 = I \\ &\iff a^2 I + 2abJ + b^2(2J - I) - I = 0_{2,2} \\ &\iff \left(a^2 - b^2 - 1\right) I + 2b\,(a+b)\,J = 0_{2,2} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - 1 + 2b\,(a+b) & 2b(a+b) \\ 0 & a^2 - b^2 - 1 + 2b\,(a+b) \end{pmatrix} = 0_{2,2} \end{aligned}$$

d'où par identification,

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 1 + 2b\,(a+b) = 0 \\ 2b(a+b) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 - 1 = 0 \\ b(a+b) = 0 \end{cases}$$

La seconde équation entraine $b = 0$ ou $a + b = 0$.

- Si $b = 0$, alors le système devient $\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ ce qui équivaut à $a \in \{-1, 1\}$. Ainsi, $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ sont solutions dans ce cas, ce qui correspond à $X = -I$ et $X = I$.
- Si $a + b = 0$, alors $b = -a$, et donc le système devient $\begin{cases} a^2 - a^2 - 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$; il n'y a pas de solution dans ce cas.

Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \{-I, I\}}$.

Résolvons (iii), i.e. $(X + J)^n = J^\top$. On remarque que pour toute matrice $X \in E$, la matrice $X + J$ est triangulaire supérieure. Ainsi, par produit

de matrices triangulaires supérieures, la matrice $(X + J)^n$ est une matrice triangulaire supérieure, et ce y compris pour $n = 0$.

Cependant, $J^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice triangulaire supérieure. Il n'y a donc aucune solution à cette équation. Finalement $\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$.

5) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $M(a, b)$ est inversible dans E si et seulement si le système suivant (d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$) admet une solution : $\begin{cases} ax - by & = 1 \\ bx + (2b + a)y & = 0 \end{cases}$

6 pts

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. La matrice $M(a, b)$ est inversible dans E si et seulement s'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} &M(a,b)M(x,y) = I \\ \iff\ &M(ax - by, ay + bx + 2by) = I \\ \iff\ &(ax - by)I + (ay + bx + 2by)J = I \\ \iff\ &(ax - by - 1)I + (ay + bx + 2by)J = 0_{2,2} \end{aligned}$$

En posant $p = ax - by - 1$ et $q = ay + bx + 2by$, on doit donc vérifier que $pI + qJ = 0$, càd

$$\begin{pmatrix} p + q & q \\ 0 & p + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cela équivaut à $p + q = 0$ et $q = 0$, donc à $p = 0$ et $q = 0$. Ainsi, $M(a, b)$ est inversible si et seulement s'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} ax - by - 1 = 0 \\ ay + bx + 2by = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + (2b + a)y = 0 \end{cases}}$$

6) En déduire les éléments inversibles de E. On pourra distinguer les cas $a + b = 0$ et $a + b \neq 0$.

7 pts

- Si $a + b = 0$, alors $b = -a$ et on obtient le système
$$\begin{cases} ax + ay = 1 \\ -ax - ay = 0 \end{cases}$$
ce qui en sommant les lignes donne $1 = 0$, ce qui est impossible. Dans ce cas, il n'y a donc aucune solution.

- Si $a+b \neq 0$, alors avec $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ dans le système initial on obtient :

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ (a+b)x + (b+a)y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+b)(x+y) = 1 \\ ax - by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{a+b} \\ ax - by = 1 \end{cases} \quad \text{car } a+b \neq 0$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+b} - y \\ a\left(\dfrac{1}{a+b} - y\right) - by = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{a+b} - y \\ \dfrac{a}{a+b} - (a+b)y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a+b} - 1 = (a+b)y \\ x = \dfrac{1}{a+b} - y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{-b}{(a+b)^2} \\ x = \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{b}{(a+b)^2} \end{cases}$$

  Ainsi, on obtient toujours une solution dans ce cas : $\mathcal{S} \neq \varnothing$.

Finalement, le système est compatible si et seulement si $a+b \neq 0$. Les éléments inversibles de E sont donc $\boxed{\text{les matrices } M(a,b) \text{ telles que } a+b \neq 0}$.

Exercice 2 : congruence polynômiale

40 pts

Soit $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$. On définit la relation "congru modulo P" sur $\mathbb{K}[X]$ par :

$$A \equiv B \quad [P] \iff P \mid A - B$$

1) Montrer que la relation "congru modulo P" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}[X]$.

4 pts

Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.

- $A \equiv A \quad [P] \iff P \mid A - A \iff P \mid 0$. Or, $0 = 0 \times P$, donc $P \mid 0$. Ainsi, la relation est réfléxive.
- On suppose $A \equiv B \quad [P]$. Alors $P \mid (A - B)$. Alors $P \mid -(A-B)$ (car $-1 \in \mathbb{K}^*$). D'où $P \mid B - A$. On en déduit que la relation est symétrique.
- On suppose $A \equiv B \quad [P]$ et $B \equiv C \quad [P]$. Alors $P \mid (A-B)$ et $P \mid (B-C)$. Alors $P \mid (A - B + B - C)$, càd $P \mid (A - C)$. Donc $A \equiv C \quad [P]$. Ainsi, la relation est transitive.

Finalement, il s'agit d'une relation d'équivalence.

2) Montrer que si $A \equiv B \quad [P]$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $A^k \equiv B^k \quad [P]$.

3 pts

On suppose $A \equiv B \quad [P]$, càd $P \mid A - B$. Pour conclure, il suffit de montrer que $P \mid A^k - B^k$.

- Si $k = 0$, alors $A^0 - B^0 = 0$. Donc $P \mid A^0 - B^0$.
- Si $k \geq 1$, alors $A^k - B^k = (A - B)\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} A^j B^{k-1-j}$. Comme $P \mid A - B$, on a donc $P \mid A^k - B^k$.

Dans tous les cas, $P \mid A^k - B^k$. On a donc $A^k \equiv B^k \quad [P]$.

3) Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \wedge Q = 1$. Montrer que $A \equiv B \quad [P]$ si et seulement si $AQ \equiv BQ \quad [P]$.

4 pts

On procède par double implication :

- Supposons $A \equiv B \quad [P]$. On a donc $P \mid (A-B)$. En particulier, $P \mid (A-B)Q$. On en déduit que $P \mid AQ - BQ$. Ainsi, $AQ \equiv BQ \quad [P]$.
- Supposons $AQ \equiv BQ \quad [P]$. On a donc $P \mid AQ - BQ$. En particulier, $P \mid (A-B)Q$. Par le lemme de Gauss, comme $P \wedge Q = 1$, on en déduit que $P \mid (A - B)$. D'où $A \equiv B \quad [P]$.

Les questions 4 et 5 qui suivent sont indépendantes.

4) a) Montrer que $X^4 \equiv 1 \quad [X^3 + X^2 + X + 1]$.

3 pts

$$\begin{aligned} X^4 - 1 &= X^4 - 1^4 \\ &= (X-1)\sum_{k=0}^{3} X^k \\ &= (X-1)\left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $X^3 + X^2 + X + 1$ divise $X^4 - 1$, d'où le résultat. *Note : une division euclidienne qui donne un reste nul marche également.*

b) En déduire que pour tous entiers naturels m, n, p, q, le polynôme X^3+X^2+X+1 divise le polynôme $X^{4m+3}+X^{4n+2}+X^{4p+1}+X^{4q}$.

7 pts

On pose $Q = X^3+X^2+X+1$. Par ce qui précède,

$$X^4 \equiv 1 \quad [Q]$$

Par les questions 2 et 3, on a donc

$$X^{4m} \equiv 1^m \equiv 1 \quad [Q] \qquad \text{puis} \qquad X^{4m}X^3 \equiv X^3 \quad [Q]$$

On en déduit que

- $Q \mid X^{4m+3} - X^3$

On montre de même que :

- $Q \mid X^{4n+2} - X^2$
- $Q \mid X^{4p+1} - X$
- $Q \mid X^{4q} - 1$

Alors Q divise la somme de ces 4 polynômes, càd

$$Q \mid X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q} - Q$$

et comme $Q \mid Q$, on a donc

$$\boxed{X^3+X^2+X+1 \mid X^{4m+3}+X^{4n+2}+X^{4p+1}+X^{4q}}$$

5) a) Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A \wedge P = 1$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AC \equiv 1 \quad [P]$.

4 pts

Par le théorème de Bézout, il existe $C, D \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AC + PD = 1$. Ainsi, $AC - 1 = PD$. D'où $P \mid (AC-1)$, ce qui permet de déduire :

$$\boxed{AC \equiv 1 \quad [P]}$$

b) Dans la suite du problème, on pose $A = X^4+1$ et $B = X^3+1$. Déterminer le PGCD de A et B ainsi qu'un couple de coefficients de Bézout associé.

6 pts

On applique l'algorithme d'Euclide. Après calcul, on trouve les divisions euclidiennes suivantes :

- $A = BX + (-X+1)$
- $B = (-X+1)(-X^2-X-1) + 2$

2 est nécessairement le dernier reste non nul. Ainsi, $A \wedge B$ est unitaire et associé à 2, donc $\boxed{A \wedge B = 1}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 2(A\wedge B) = 2 &= B - (-X+1)(-X^2-X-1) \\ &= B - (A - BX)(-X^2-X-1) \\ &= A(X^2+X+1) + B + BX(-X^2-X-1) \\ &= A(X^2+X+1) + B\left(-X^3-X^2-X+1\right) \end{aligned}$$

et donc on a $AU + BV = 1 = A \wedge B$ avec

$$\boxed{(U,V) = \left(\frac{1}{2}\left(X^2+X+1\right) \, , \, \frac{1}{2}\left(-X^3-X^2-X+1\right)\right)}$$

c) Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation $AR \equiv 1 \quad [B]$ d'inconnue $R \in \mathbb{K}[X]$.

9 pts

On a $AU + BV = 1$ et donc $B \mid AU - 1$. On en déduit que $AU \equiv 1 \quad [B]$. Montrons que $U \wedge B = 1$: on peut par exemple le justifier en montrant que U et B n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$. Les racines de U étant j et j^2, on a bien

$$B(j) = j^3 + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$$
$$B(j^2) = j^6 + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Donc B et U n'ont pas de racines communes et on a bien $U \wedge B = 1$. Ainsi, par la question 3,

$$\begin{aligned} & AR \equiv 1 \quad [B] \\ \iff & AUR \equiv U \quad [B] \\ \iff & R \equiv U \quad [B] \\ \iff & B \mid R - U \\ \iff & \exists Q \in \mathbb{K}[X] \quad R - U = BQ \\ \iff & \exists Q \in \mathbb{K}[X] \quad R = U + BQ \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\left(X^2+X+1\right) + BQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\right\}}$$

Exercice 3 : Calcul matriciel

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3,5 pts

1) Calculer explicitement les matrices A^2 et A^3.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ 2 & 15 & -12 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

3,5 pts

2) Déterminer trois entiers a, b, c tels que $A^3 = aA^2 + bA + cI_3$ (on écrira explicitement la résolution du système nécessaire au calcul de a, b, c).

$$\begin{aligned}
& A^3 = aA^2 + bA + cI_3 \\
\iff & \begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ 2 & 15 & -12 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ 2 & 15 & -12 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 3b + c & -3a - b & 3a - 3b \\ 2b & 7a + 3b + c & -6a \\ 2b & 3a + b & -2a + 2b + c \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{cases} a - 3b + c = -3 \\ -3a - b = -7 \\ 3a - 3b = 3 \\ 2b = 2 \\ 7a + 3b + c = 15 \\ -6a = -12 \\ 2b = 2 \\ 3a + b = 7 \\ -2a + 2b + c = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1 \\ a + c = 0 \\ 3a = 6 \\ 7a + c = 12 \\ -6a = -12 \\ 3a = 6 \\ -2a + c = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \\ c = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

On trouve donc que $\boxed{A^3 = 2A^2 + A - 2I_2}$.

4 pts

3) En utilisant la question précédente, déterminer si A est inversible, et le cas échéant, exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A (on ne demande pas un calcul explicite).

Par ce qui précède, on a $A^3 - 2A^2 - A = -2I_3$ et donc

$$A \left(\frac{A^2 - 2A - I_2}{-2} \right) = I_3$$

et donc la matrice A est inversible, d'inverse

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I_2}$$

1,5 pts

4) On pose $Q = X^3 - aX^2 - bX - c$. Déterminer les racines de Q.

$$\begin{aligned} Q &= X^3 - 2X^2 - X + 2 \\ &= (X-1)(X^2 - X - 2) \\ &= (X-1)(X+1)(X-2) \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de Q sont $\boxed{1,\ -1 \text{ et } 2}$.

3,5 pts

5) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & & \\ -1 & 1 & 2 & & 1 & \\ -1 & 1 & 1 & & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & & & 1 \\ -1 & 1 & 2 & & 1 & \\ 2 & -1 & -1 & 1 & & \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & & & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & 2 \\ 0 & 0 & 1 & & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 + L_3 \\ L_2 - L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Ainsi, P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

6) Calculer la matrice $P^{-1}AP$, qu'on notera D par la suite (vérifier que D est diagonale). Quel lien peut-on faire avec le polynôme Q de la question 4 ?

3,5 pts

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D} \end{aligned}$$

On constate que les racines de Q sont identiques aux éléments diagonaux de D.

7) Donner l'expression de D^n, puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = PD^nP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer explicitement A^n).

4 pts

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme D est diagonale,

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

- Si $n = 0$, $D^n = I_3$ et donc $PD^0P^{-1} = I_3 = A^0$
- Si $n \geq 1$, on a $D = P^{-1}AP$ par ce qui précède, donc $A = PDP^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1}}_{n \text{ fois}} = P\underbrace{DD\dots D}_{n \text{ fois}}P^{-1} \qquad \text{car } P^{-1}P = I_3 \\ &= \boxed{PD^nP^{-1}} \end{aligned}$$

8) On définit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) par les conditions suivantes : $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -3u_n - v_n - 3w_n, \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \quad \text{et} \quad w_{n+2} = 2u_n + v_n + 2w_n$$

On notera de plus $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1,5 pts

a) Établir une relation entre X_{n+1} et X_n faisant intervenir la matrice A.

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3u_n - v_n - 3w_n \\ 2u_n + 3v_n \\ 2u_n + v_n + 2w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

et donc $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$.

2,5 pts

b) En déduire une relation entre X_n et X_0 qu'on démontrera rigoureusement.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^nX_0$.

- Pour $n = 0$, on a $X_0 = I_2X_0$ et donc $X_0 = A^0X_0$
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$. Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} & X_n = A^nX_0 \\ \Longrightarrow\ & AX_n = A^{n+1}X_0 \\ \Longrightarrow\ & X_{n+1} = A^{n+1}X_0 \qquad \text{par la question a)} \end{aligned}$$

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{X_n = A^nX_0}$.

5,5 pts

c) Calculer explicitement u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
X_n &= A^n X_0 \\
&= PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\
&= PD^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix} \\
\implies \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \boxed{\begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

Exercice 4 : Équation arithmétique de polynômes

On veut déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que le polynôme $Q = P(2X) - 2P(X)^2 + 1$ soit divisible par X^3.

1) Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ est solution si et seulement si $\quad \forall k \in [\![0, 2]\!] \quad Q^{(k)}(0) = 0$.

4 pts

$X^3 \mid Q$ si et seulement si 0 est racine de Q de multiplicité au moins 3, donc si et seulement si $\boxed{Q(0) = Q'(0) = Q''(0) = 0}$.

2) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $Q^{(k)}(X)$ puis $Q^{(k)}(0)$, en fonction des dérivées de P. On utilisera la formule de Leibniz.

6 pts

On a

$$Q^{(k)}(X) = (P(2X))^{(k)} - 2\left(P(X)^2\right)^{(k)} + 1^{(k)}$$

Or,

$$(P(2X))^{(k)} = 2^k P^{(k)}(2X)$$

et par ailleurs, avec la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}
\left(P(X)^2\right)^{(k)} &= (P(X)P(X))^{(k)} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}P^{(j)}(X)P^{(k-j)}(X)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{Q^{(k)}(X) = 2^k P^{(k)}(2X) - 2\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}P^{(j)}(X)P^{(k-j)}(X) + \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \geq 1 \end{cases}}$$

En particulier,

$$\boxed{Q^{(k)}(0) = 2^k P^{(k)}(0) - 2\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}P^{(j)}(0)P^{(k-j)}(0) + \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \geq 1 \end{cases}}$$

3) On pose $a = P(0)$, $b = P'(0)$ et $c = P''(0)$. Déterminer les valeurs possibles, lorsque P est solution, de a, b, c.

8 pts

Par la question 1, P est solution si et seulement si

$$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ Q'(0) = 0 \\ Q''(0) = 0 \end{cases}$$

Or, par la question 2,

$$\begin{aligned}
Q^{(0)}(0) &= 2^0 P^{(0)}(0) - 2\sum_{j=0}^{0}\binom{0}{j}P^{(j)}(0)P^{(0-j)}(0) + 1 \\
&= P(0) - 2P^{(0)}(0)P^{(0)}(0) + 1 \\
&= a - 2a^2 + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'(0) &= 2P'(0) - 2\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}P^{(j)}(0)P^{(1-j)}(0) \\
&= 2P'(0) - 2P(0)P'(0) - 2P'(0)P(0) \\
&= 2b - 4ab
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q''(0) &= 2^2 P''(0) - 2\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}P^{(j)}(0)P^{(2-j)}(0)\\
&= 4P''(0) - 2P(0)P''(0) - 4P'(0)P'(0) - 2P''(0)P(0)\\
&= 4c - 2ac - 4b^2 - 2ac\\
&= 4c - 4ac - 4b^2
\end{aligned}
$$

On obtient donc que P est solution si et seulement si

$$
\begin{cases} a - 2a^2 + 1 = 0 \\ 2b - 4ab = 0 \\ 4c - 4ac - 4b^2 = 0 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} (a-1)(-2a-1) = 0 \\ b(1-2a) = 0 \\ c - ac - b^2 = 0 \end{cases}
$$

La première ligne entraine que $a - 1 = 0$ ou $-2a - 1 = 0$. On distingue deux cas :

- Si $a = 1$, alors le système devient $\begin{cases} 0 = 0 \\ 2b = 0 \\ c - c - b^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 0 \end{cases}$ Dans ce cas, les solutions sont les triplets $(1, 0, c)$ avec $c \in \mathbb{R}$.
- Si $-2a - 1 = 0$, càd $a = -\dfrac{1}{2}$, on a alors $\begin{cases} 0 = 0 \\ 2b = 0 \\ c + \frac{1}{2}c - b^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ Dans ce cas, les solutions sont les triplets $\left(-\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$.

Finalement, les valeurs possibles de (a, b, c) sont

$$
\boxed{\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) \quad \text{et} \quad (1, 0, c) \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}}
$$

12 pts **4)** En utilisant la formule de Taylor, conclure.

Soit un entier $n \geq \max(2, \deg P)$. Alors par la formule de Taylor,

$$
P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k = P(0) + P'(0)X + \frac{1}{2}P''(0)X^2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k
$$

Par la question précédente,

- Soit $(a, b, c) = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$, et on peut écrire
$$
P = -\frac{1}{2} + 0 + 0 + \sum_{k=3}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k = -\frac{1}{2} + X^3\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^{k-3}\right)
$$
(on a exploité toutes les informations, on arrête l'analyse ici). On peut donc dire que $P = -\dfrac{1}{2} + X^3 R(X)$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$.
- Soit $(a, b, c) = (1, 0, c)$, et on peut écrire
$$
\begin{aligned}
P &= 1 + 0 + \frac{cX^2}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k\\
&= 1 + X^2\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^{k-2}\right)
\end{aligned}
$$
(on a exploité toutes les informations, on arrête l'analyse ici). On peut donc dire que $P = 1 + X^2 S(X)$ avec $S \in \mathbb{R}[X]$.

On a trouvé que si P est solution, alors

$$
\begin{aligned}
&P = -\frac{1}{2} + X^3 R(X) \qquad \text{avec } R \in \mathbb{R}[X]\\
\text{ou} \qquad &P = 1 + X^2 S(X) \qquad \text{avec } S \in \mathbb{R}[X]
\end{aligned}
$$

Synthèse : réciproquement, on va vérifier si dans chaque cas, le polynôme

$$
Q = P(2X) - 2P(X)^2 + 1
$$

est divisible par X^3. Pour le premier cas

$$
Q = -\frac{1}{2} + 8X^3R(2X) - 2\left(-\frac{1}{2} + X^3R\right)^2 + 1 = X^3\left(8R(2X) + 2R - 2X^3R^2\right)
$$

Dans le second cas,

$$
Q = 1 + 4X^2S(2X) - 2\left(1 + X^2S\right)^2 + 1 = X^3\left(-2XS^2\right)
$$

Ainsi, dans tous les cas, P est solution. Par conséquent,

$$
\boxed{\mathcal{S} = \left(-\frac{1}{2} + X^3\mathbb{R}[X]\right) \cup \left(1 + X^2\mathbb{R}[X]\right)}
$$